DR. KOPASZ ÉVA
Baja

Síkidomok előállítása szöges táblán

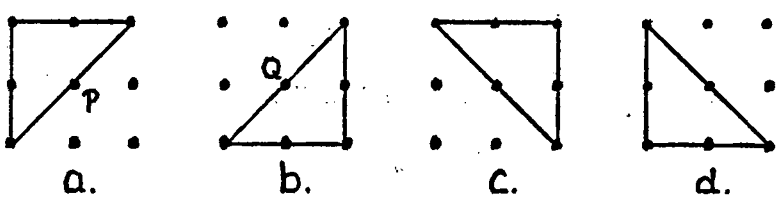
Az 1987—88-as tanévben életbe lépett korrekciós tanterv az 1978-as tantervhez képest még szemléletesebb alapokra helyezi a geometria tanítását. Első osztálytól kezdve feladatunk a sokszög fogalmának alakítása. Kezdetben nyírással, hajtogatással, sablon körülrajzolásával, később vonalzóval állítjuk elő a sokszögeket. Célszerű pl. — a szöges tábla méreteit figyelembe vevő — különböző háromszögsablonokat a gyerekek kezébe adni. Ezeket a lapokat helyeztessük a szöges táblára, és keríttessük körül gumigyűrűvel. Így elérhetjük azt, hogy később — amikor nincs sablon a kezükben — akkor is látják majd a lapot, ha nem helyezik is oda. A harmadik osztály tananyagában szerepel, hogy háromszor hármas szöges táblán háromszögeket feszíttessünk ki, ill. kerestessük meg az összes lehetséges háromszöget; a negyedik osztályban pedig a kifeszített háromszöggel egybevágó összes eset megkeresése a feladat. Ez utóbbi lehetőséget ad az egybevágósági transzformációk gyakoroltatására. Az egyik alakzatból a másik néha több egybevágósági transzformáció egymás utáni alkalmazásával (transzformációk szorzata) állítható elő. Ezeknek a végigvitele nem egyszerű feladat a 9—10 éves gyermekek számára. Ha helyesen szemléltetünk, és „láthatóvá" tesszük az egyes lépéseket, azaz minden változást külön ábrán a gyerekek előtt hagyunk, a többség számára két-három transzformációs lépés egymás utáni végrehajtása is követhetővé válik.

Háromszor hármas szöges táblán 76 háromszög feszíthető ki, természetesen ezek közül több egybevágó. (A 9 szögpontból hármat kell kiválasztani sorrendre való tekintet nélkül — ez 9 elem harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációinak számával egyezik meg:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2} = 84.$$

Ezek között vannak olyan esetek is, amikor a 3 pont egy egyenesre illeszkedik, és így nem határoz meg háromszöget. Nyolc ilyen eset van: 3 „vízszintes", 3 „függőleges", 2 átlós egyenes. Tehát az összes háromszög száma: 84—8 = 76.)

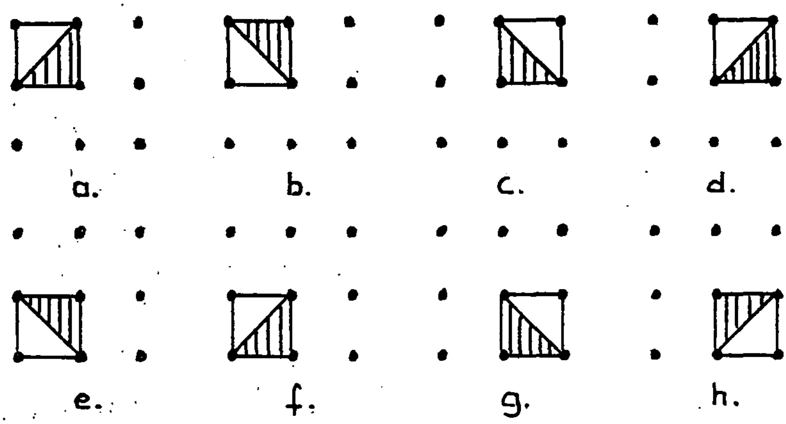
Először keressük meg a derékszögű és egyenlő szárú eseteket!



1. ábra

Kezdjük a kifeszítést a legnagyobb területű háromszöggel (1. ábra)! Ez a háromszög egyenlő szárú és derékszögű, a két befogó a három rácspont távolságával egyenlő. Mind a négy háromszög egybevágó, mert a megfelelő oldalak egyenlők, tehát lényegileg nem tekinthetők különbözőnek. Hogy mégis mindegyiket felrajzoljuk, az az egybevágósági transzformációknak köszönhető. Induljunk ki az *a)* esetből. Ha a P pont körül az óramutató járásával megegyező irányban 180°-kal — azaz két derékszöggel — elforgatjuk, akkor a *b)* esethez jutunk; de származtathatjuk *b*-t *az a*-ból az átfogóra való tengelyes tükrözéssel is. Ha *b*-t a Q pont körül az óramutató járásával ellentétes irányban forgatjuk el, akkor a *c)* esetet kapjuk. Ez utóbbit tengelyesen tükrözve az átfogóra adódik a *d)* helyzetű háromszög. Itt nincs több lehetőség, hiszen a háromszor hármas négyzethálónak mind a négy csúcsába elhelyeztük a háromszög derékszögű csúcsát.

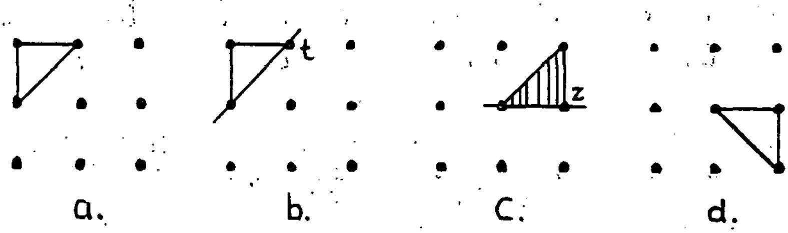
Természetesnek tartjuk, hogy a matematikai hátteret csak a tanítónak kell ismerni. A tanulók „csupán előállítják" a fenti négy háromszöget anélkül, hogy pl. az elforgatásról és annak következményeiről bővebbet tudnának. Fölvetődhet akkor a kérdés, hogy miért fontos a tanítónak mindezt tudni. Hadd álljon itt a legkézenfekvőbb válasz: tanítványaink közül bárki megkérdezheti, hogy pl. az első kifeszített háromszögből hogyan kaphatjuk a másodikat.



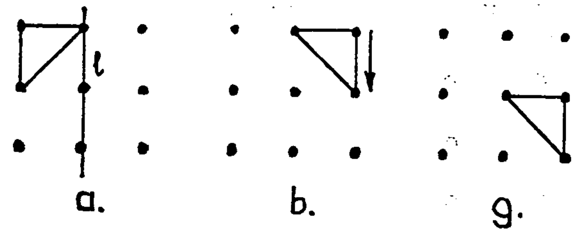
2. ábra

A 2. ábrasorozat *a)* esete az 1. *a)* felére kicsinyített képe, tehát abból R középpontú hasonlósági transzformációval állítható elő. Ugyanez a helyzet a *b)* (1. b), *c)* (1. c) és *e)* (1. d) jelzésű háromszögeknél is. Az *f)* eset az a-ból eltolással állítható elő (az eltolás nagysága két rácspont távolságával egyenlő, az eltolás iránya pedig „függőlegesen" lefelé). Ugyanilyen módon származtatható „felfelé" való eltolással *b)* az e-ből, „lefelé" való eltolással *g)* a c-ből, „vízszintes" irányú jobbra tolással *d)* az a-ból. A satírozott háromszögeket az átfogóra vonatkozó tengelyes tükrözésekkel nyerjük.

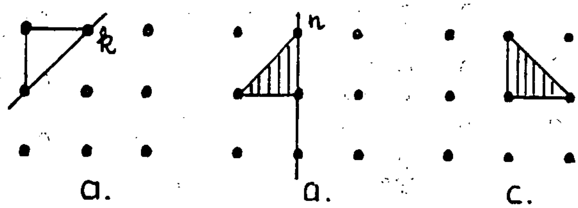
Összetettebb transzformációk is nyomon követhetők: pl. a-ból *g)* előállítása tengelyes tükrözések egymás utáni végrehajtásával. (A pontrácsok alatti betűk a 2. ábrasorozatnak megfelelő helyzetű háromszögeket jelentik.)



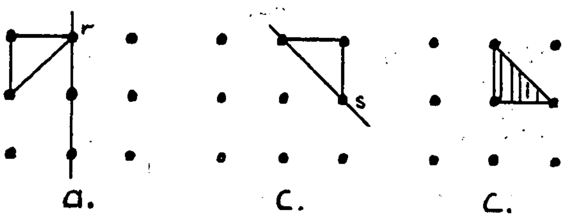
Másképpen is származhatjuk a-ból a g-t:



Az a-ból a *c)* ábra satírozott háromszögének két lehetséges előállítása:



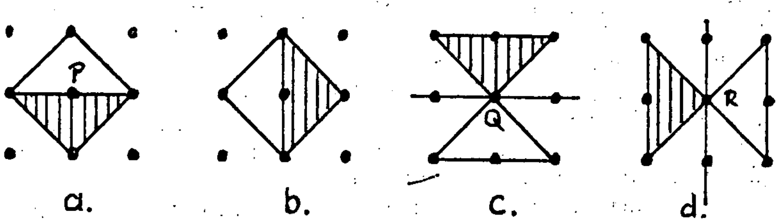
vagy



Hasonló módon járhatunk el a többi háromszög esetében is.

Mind a 16 háromszög derékszögű, egyenlő szárú és a befogadók nagysága két rácspont távolságával egyezik meg.

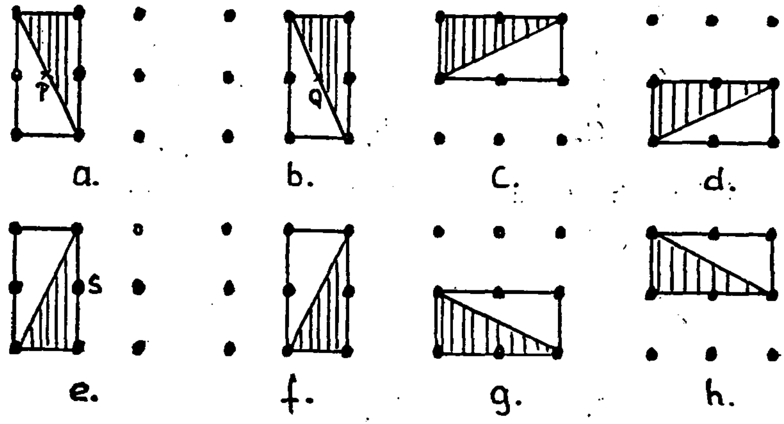
A 3. ábrasorozatban mindegyik háromszög derékszögű, egyenlő szárú, az átfogó három rácspont távolságával egyenlő.



3. ábra

Az *a)* helyzetből az átfogóra való tengelyes tükrözéssel jutunk a satírozott háromszöghöz. Ha az *a)* ábra satírozatlan háromszögét a P pont körül az óramutató járásával ellentétes irányban 90°-kal elforgatjuk, akkor a *b)* esetet kapjuk; ezt az átfogóra tükrözve jutunk a satírozott háromszöghöz. Az *a)* ábra satírozatlan háromszögének „függőlegesen" lefelé két rácspont távolságával való eltolásával kapjuk a *c)* esetet. Ha ezt a Q ponton átmenő, rácspontokra illeszkedő, „vízszintes" helyzetű tengelyre tükrözzük, akkor a satírozott háromszöget állítjuk elő. A *b)* eset satírozatlan háromszögéből „vízszintesen" két rácspont távolságával való jobbra tolásra nyerjük a d-t, az R ponton átmenő rácspontokra illeszkedő „függőleges" helyzetű tengelyre való tükrözéssel pedig a satírozott háromszöget.

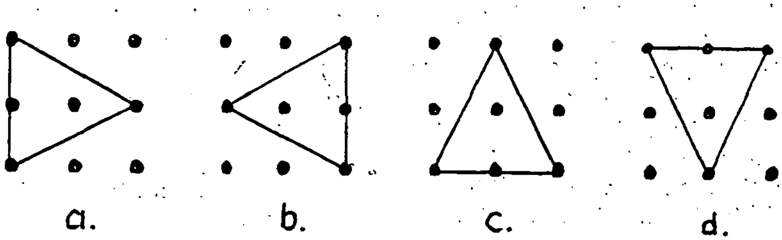
A továbbiakban tárgyalt háromszögek vagy csak derékszögűek, vagy csak egyenlő szárúak, vagy egyik se.



4. ábra

A 4. ábrán minden háromszög derékszögű, de nem egyenlő szárú, az egyik befogó két rácspont, a másik három rácspont távolságával egyenlő. Ezekből következik, hogy a sorra vett esetek mind egybevágók (két oldal és a közrezárt szög egyenlősége miatt). Az a-ból a satírozott háromszög a P pontra való tükrözéssel nyerhető. Ha az *a)* háromszöget jobbra „vízszintesen" két rácspont távolságával eltoljuk, kapjuk a *b)* esetet, amelyből a Q pontra vonatkozó tükrözéssel nyerhető a satírozott háromszög. Ha a *b)* ábra háromszögét az R pont körül az óramutató járásával ellentétes irányban derékszögnyivel elforgatjuk, a *c)* esethez jutunk, amiből az átfogó felezőpontjára való tükrözéssel állítható elő a satírozott eset. Ha ezt a két háromszöget együtt eltoljuk „függőlegesen" lefelé két rácspont távolságával, a *d)* helyzetű háromszögekhez jutunk. Az *a)* esetből a rövidebb befogóra való tengelyes tükrözéssel, majd pedig a három rácspont távolságával való függőlegesen" lefelé irányuló eltolással állítható elő az *e)* helyzet; ebből további eltolással (két rácspont távolságával „vízszintesen" jobbra) az *f)*. Az *e)* és *f)* esetben az átfogó felezőpontjára való tükrözéssel kapjuk a két satírozott háromszöget. A *g)* ábrán felvett háromszöghöz legegyszerűbben az *e)* satírozott háromszögéből juthatunk az S pont körüli óramutató járásával ellentétes irányú 90°-os elforgatással. Ha ez utóbbi háromszöget két rácspont távolságával „függőlegesen" felfelé eltoljuk, a *b)* esetet kapjuk. A satírozott háromszögek mind a két esetben az átfogó felezőpontjára vonatkozó tükrözéssel állíthatók elő.

Az 5. ábrán minden háromszög egyenlő szárú, de nem derékszögű. Mind a négy háromszög egybevágó, mert a három megfelelő oldaluk egyenlő. Az alap három rácspont távolsága, a két szár átlós helyzetű.

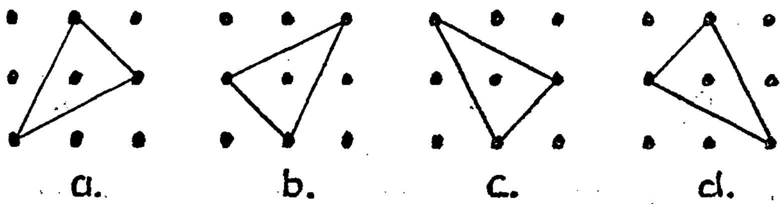


5. ábra

Az a-ból a *b)* például úgy nyerhető, hogy először az alapra tengelyesen tükrözzük, majd a három rácspont távolságával „vízszintesen" jobbra toljuk úgy, hogy a háromszög „rákerüljön" a háromszor hármas pontrácsra; *vagy* a jelölt P pont körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban 180°-kal elforgatjuk; *vagy* a P pontra tükrözzük.

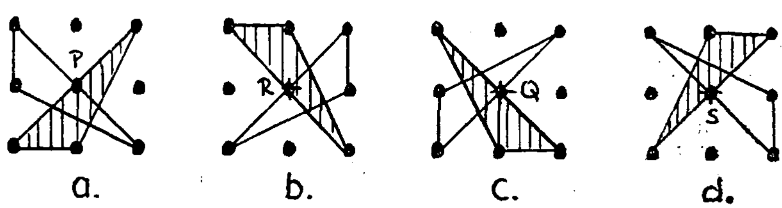
Ha az *a)* háromszöget a P pont körül az óramutató járásával ellentétes irányban 90°-kal elforgatjuk, a *c)* esethez jutunk; ha pedig az a-t az óramutató járásával megegyező irányban forgatjuk el 90°-kal, kapjuk a *d)* helyzetűt.

A 6. ábra minden háromszöge egyenlő szárú, nem derékszögű, az alap és a szárak is átlós helyzetűek. Az előállított négy háromszög a három megfelelő oldal egyenlősége miatt egybevágó.



6. ábra

Ha az *a)* ábra háromszögét tükrözzük a P pontra, a *b)* helyzetűt kapjuk. Az *a)* esetben kifeszített háromszöget a P pont körül 90°-kal az óramutató járásával megegyező irányban forgatva a *c)* esetet állíthatjuk elő, és ugyancsak az *a)* esetből P körüli óramutató járásával ellentétes irányú 90°-os forgatással keletkezik a *d)* eset.

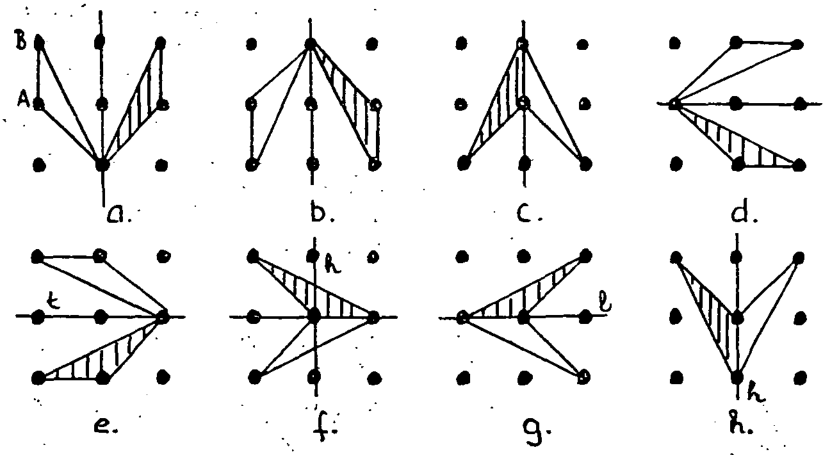


7. ábra

A 7. ábra háromszögei általánosak, az egyik oldal két rácspont távolságával azonos, a másik két oldal átlós helyzetű.

Induljunk ki az *a)* ábrából. A satírozott esetet a P pont körüli óramutató járásával ellentétes irányú 90°-os elforgatással nyerjük. Ha az *a)* háromszöget tükrözzük a P ponton átmenő, rácspontokra illeszkedő, „függőleges" helyzetű tengelyre, a *b)* háromszöghöz jutunk. Ha ez utóbbit R pont körül az óramutató járásával ellentétes irányban 90°-kal elforgatjuk, akkor a satírozott háromszöget kapjuk. Az *a)* helyzetű satírozatlan háromszöget a P ponton átmenő, rácspontokra illeszkedő, „vízszintes" helyzetű tengelyre tükrözve, a *c)* jelzésű háromszöget állíthatjuk elő. Az így nyert háromszöget Q pont körül az óramutató járásával ellentétes irányban 90°-kal elforgatva a satírozott esethez jutunk.. Ha az *a)* ábra satírozatlan háromszögét tükrözzük a P pontra, akkor előállítjuk a *d)* helyzetűt, ebből pedig az S pont körüli óramutató járásával ellentétes irányú 90°-os forgatással a satírozottat nyerjük.

A 8. ábra háromszögei is általánosak; az egyik oldal két rácspont távolsága, a másik két oldal pedig átlós helyzetű.



8. ábra

Ha tükrözzük az *a)* háromszöget a jelölt tengelyre, a satírozott alakzathoz jutunk. Az A ponton átmenő, rácspontokra illeszkedő, „vízszintes" helyzetű tengelyre tükrözve az *a)* eset satírozatlan háromszögét, a *b)* helyzetűhöz jutunk, aminek tengelyesen tükrözött képe a satírozott háromszög. Ha az *a)* háromszöget „vízszintes" irányban két rácspont távolságával jobbra toljuk, a *c)* esetet kapjuk, aminek a berajzolt tengelyre vonatkozó képe a satírozott háromszög. Az *a)* ábra satírozatlan esetéből a *d)* úgy állítható elő, hogy a B pont körül az óramutató járásával megegyező irányban 90°-kal elforgatjuk, majd „vízszintesen" jobbra három rácspont távolságával eltoljuk. Ha az így nyert háromszöget a jelzett tengelyre tükrözzük, előállítjuk a satírozott alakzatot. Ha az *a)* háromszöget az AB oldalára tükrözzük, majd pedig a B pont körül az óramutató járásával ellentétes irányban 90°-kal elforgatjuk, akkor az *e)* esetet kapjuk; ennek t-re vonatkozó tükörképe a satírozott háromszög. Ha az *a)* helyzetű háromszöget az A pont körül az óramutató járásával megegyező irányban 90°-kal elforgatjuk, és „vízszintesen" jobbra két rácspont távolságával eltoljuk, az *f)* helyzetű háromszöget kapjuk, aminek a satírozott tengelyesen tükrözött képe. A *g)* eset f-ből a *h* egyenesre való tükrözéssel egyszerűen nyerhető. Előállíthatjuk a-ból is, csak több transzformáció egymás után való alkalmazásával: először az A pont körül az óramutató járásával azonos irányban 90°-kal elforgatjuk, majd pedig tükrözzük az *a)* ábrán bejelölt tengelyre; ha az így kapott alakzatot az *l* tengelyre tükrözzük, a satírozott háromszöget kapjuk. Az *a)* ábra háromszögét eltolva jobbra „vízszintesen" két rácspont távolságával, majd pedig tükrözve az A ponton átmenő, rácspontokra illeszkedő, „vízszintes" helyzetű tengelyre, a *b)* esetet kapjuk; ez utóbbinak tengelyesen tükrözött képe a satírozott.

Lényegében tehát 8 különböző háromszög feszíthető ki a háromszor hármas szöges táblán.

Az egyes ábrasorozatokon belül a fent leírtakon kívül más utakon is el lehet jutni egyik kiválasztott esetből egy másikba, ebben nem törekedtem teljességre. A kapott 76 háromszögből — célszerűen — részhalmazokat képezve csoportosításokat végeztethetünk a gyermekekkel: egybevágóság, szimmetria, vannak-e egyenlő oldalai, van-e derékszöge stb., lehetnek a szempontok.